**BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ**

***№4*** ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2015***

**УДК 02.25.19**

# ОБ АППРОКСИМАЦИИ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ОКРУЖНОСТИ

**А.Ф.АМРАХОВА, Ч.А.ГАДЖИЕВА**
***Бакинский Государственный Университет***
***1919-bdu@mail.ru***

*В работе гиперсингулярный интегральный оператор на окружности аппроксимируется последовательностями операторов специального вида, доказывается, что для гиперсингулярного интегрального оператора аппроксимирующие операторы сохраняют свойства, аналогичные основным свойствам этого оператора, и поэтому полученные оценки с точки зрения скорости сходимости дают более точные результаты.*

**Ключевые слова:** *гиперсингулярный интеграл, аппроксимирующие операторы, скорости сходимости, ядро Коши.*

Сингулярные интегральные уравнения, к которым сводятся задачи обтекания поверхностей идеальной несжимаемой жидкостью, являются граничными интегральными уравнениями для решения задачи Неймана для уравнения Лапласа при ее решении с помощью потенциала двойного слоя. В этом случае неизвестной функцией является градиент плотности потенциала двойного слоя, и поэтому в пространственных задачах он имеет две составляющие. Так как эти составляющие не являются независимыми функциями, то получающиеся алгоритмы численного решения пространственных задач обтекания методом коллокации имели очень сложную структуру даже для простых поверхностей (см. [1]). Поэтому в работе [2] было предложено в качестве неизвестной функции брать плотности потенциала двойного слоя и сводит задачу Неймана для уравнения Лапласа к гиперсингулярному интегральному уравнению относительно этой плотности. Решение этого гиперсингулярного интегрального уравнения с помощью специальных квадратурных формул типа прямоугольников получило название метода дискретных замкнутых вихревых рамок (см. [3]). Этот метод быстро получил широкое распространение в задачах аэродинамики и других прикладных областях (см. [4]).

Настоящая работа посвящена аппроксимации гиперсингулярного интегрального оператора

$$(H\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau$$

на единичной окружности $\gamma_0=\{t\in C:|t|=1\}$ операторами вида

$$(H_n\varphi)(t)=\sum_{k=0}^{2n-1}\alpha_k^{(n)}(t)\varphi\left(\tau_k^{(t)}\right),\qquad t\in\gamma_0,$$

где $\tau_k^{(t)}=e^{k\theta i}\cdot t$, $k=\overline{0,2n}$, $\theta=\dfrac{\pi}{n}$, $n\in N$, $\alpha_k^{(n)}(t)$ – непрерывные на $\gamma_0$ функции, $k=\overline{0,2n-1}$, $n\in N$ и доказывается, что последовательность операторов $\{H_n\}$ сильно сходится к гиперсингулярному интегральному оператору $H$ в пространстве $W_2^1(\gamma_0)$, при этом для любого алгебраического полинома степенью не выше $n-1$ оператор $H_n$ совпадает с гиперсингулярной интегральной оператором $H$. Следует отметить, что нахождение обратного оператора $H_n^{-1}$ равносильно рассмотрению уравнения

$$\sum_{k=0}^{2n-1}\alpha_k^{(n)}(t)\varphi\left(\tau_k^{(t)}\right)=f(t),\quad t\in\gamma_0$$

в точках $\tau_0^{(t)},\tau_1^{(t)},...,\tau_{2n-1}^{(t)}$, поскольку решая при этом систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}\alpha_0^{(n)}(t)\varphi\left(\tau_0^{(t)}\right)+\alpha_1^{(n)}(t)\varphi\left(\tau_1^{(t)}\right)+...+\alpha_{2n-1}^{(n)}(t)\varphi\left(\tau_{2n-1}^{(t)}\right)=f\left(\tau_0^{(t)}\right),\\ \alpha_{2n-1}^{(n)}\left(\tau_1^{(t)}\right)\varphi\left(\tau_0^{(t)}\right)+\alpha_0^{(n)}\left(\tau_1^{(t)}\right)\varphi\left(\tau_1^{(t)}\right)+...+\alpha_{2n-2}^{(n)}\left(\tau_1^{(t)}\right)\varphi\left(\tau_{2n-1}^{(t)}\right)=f\left(\tau_1^{(t)}\right),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_1^{(n)}\left(\tau_{2n-1}^{(t)}\right)\varphi\left(\tau_0^{(t)}\right)+\alpha_2^{(n)}\left(\tau_{2n-1}^{(t)}\right)\varphi\left(\tau_1^{(t)}\right)+...+\alpha_0^{(n)}\left(\tau_{2n-1}^{(t)}\right)\varphi\left(\tau_{2n-1}^{(t)}\right)=f\left(\tau_{2n-1}^{(t)}\right),\end{cases}$$

относительно $\left(\varphi\left(\tau_0^{(t)}\right),\ \varphi\left(\tau_1^{(t)}\right),...,\varphi\left(\tau_{2n-1}^{(t)}\right)\right)$, находим функцию $\varphi(t)=\varphi\left(\tau_0^{(t)}\right)$.

Отметим, что для сингулярных интегральных операторов с ядрами Коши и Гильберта аналогичные аппроксимации и их применения к сингулярным интегральным уравнениям приведены, соответственно, в работах [5] и [6].

## §1. Гиперсингулярный интегральный оператор

Рассмотрим вначале следующий интеграл:

$$\int_a^b\frac{g(x)}{(x-x_0)^2}dx,\quad x_0\in(a,b),\tag{1.1}$$

где функция $g(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Если определить его по аналогии с интегралом Коши, то даже при $g\equiv1$ получится расходящийся интеграл:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{x_0-\varepsilon}\frac{1}{(x-x_0)^2}dx+\int_{x_0+\varepsilon}^{b}\frac{1}{(x-x_0)^2}dx\right)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{2}{\varepsilon}-\frac{1}{x_0-a}+\frac{1}{x_0-b}\right)=\infty.$$

Поэтому, используя идею Адамара [7] о понятии интеграла в смысле конечной части, определим интеграл (1.1) следующим образом.

**Определение 1.1.** Если существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{x_0-\varepsilon}\frac{g(x)dx}{(x-x_0)^2}+\int_{x_0+\varepsilon}^{b}\frac{g(x)dx}{(x-x_0)^2}-\frac{2g(x_0)}{\varepsilon}\right),$$

то этот предел называется гиперсингулярным интегралом функции $\frac{g(x)}{(x-x_0)^2}$, $x_0\in(a,b)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b\frac{g(x)}{(x-x_0)^2}dx$ .

Гиперсингулярный интеграл на отрезке исследовано в работах [8]-[13]. В работе [8] доказано, что если $g(x)\in H_1(\alpha)$ на отрезке $[a,b]$, т.е. если $g'(x)$ принадлежит классу Гельдера $H(\alpha)$ степени $0<\alpha\le 1$ на $[a,b]$, то гиперсингулярный интеграл (1.1) существует и справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b\frac{g(x)dx}{(x-x_0)^2}=\frac{g(b)}{x_0-a}-\frac{g(a)}{x_0-b}-\int_a^b\frac{g'(x)dx}{x_0-x}, \tag{1.2}$$

где в правой части интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_{\gamma_0}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2},\quad t\in\gamma_0, \tag{1.3}$$

где функция $\varphi(t)$ определена на единичной окружности $\gamma_0=\{t\in C:|t|=1\}$.

Используя определения 1.1 для гиперсингулярного интеграла на отрезке, определим интеграл (1.3) следующим образом.

**Определение 1.2.** Если существует предел $\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}+\frac{2i\varphi(\tau)}{\varepsilon t}\right)$, где $\gamma_\varepsilon=\{\tau\in\gamma_0:|\tau-t|>\varepsilon\}$, то этот предел называется гиперсингулярным интегралом функции $\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2}$, $t\in\gamma_0$ на окружности $\gamma_0$ и обозначается $\int_{\gamma_0}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}$.

Из определений 1.1 и 1.2 следует, что для $t=e^{ix_0}$, $x_0\in(-\pi,\pi)$ имеет место равенство

$$\int_{\gamma_0}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}+\frac{2i\varphi(\tau)}{\varepsilon t}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{x_0+\delta(\varepsilon)}^{x_0+2\pi-\delta(\varepsilon)}\frac{\varphi(e^{ix})ie^{ix}dx}{(e^{ix}-e^{ix_0})^2}+\frac{2i\varphi(e^{ix_0})}{\varepsilon e^{ix_0}}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{[-\pi,\pi]/(x_0-\delta(\varepsilon),x_0+\delta(\varepsilon))}\frac{\varphi(e^{ix})ie^{ix}}{(x-x_0)^2}\cdot\left(\frac{x-x_0}{e^{ix}-e^{ix_0}}\right)^2dx+\frac{2i\varphi(e^{ix_0})}{\varepsilon e^{ix_0}}\right)=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(e^{ix})ie^{ix}dx}{(e^{ix}-e^{ix_0})^2}+\frac{2i\varphi(e^{ix_0})}{e^{ix_0}}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\delta(\varepsilon)}\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(e^{ix})ie^{ix}dx}{(e^{ix}-e^{ix_0})^2}\,, \tag{1.4}$$

где $\delta(\varepsilon)=2\arcsin\frac{\varepsilon}{2}$. Равенство (1.4) показывает, что с помощью замены переменных $t=e^{ix}$ гиперсингулярный интеграл на окружности приводится к гиперсингулярному интегралу на отрезке.

Вычислим гиперсингулярный интеграл $\int_{\gamma_0}\frac{d\tau}{(\tau-t)^2}$, $t\in\gamma_0$. Имеем

$$\int_{\gamma_0}\frac{d\tau}{(\tau-t)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{d\tau}{(\tau-t)^2}+\frac{2i}{\varepsilon t}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{1}{t-t\cdot e^{-i\delta(\varepsilon)}}-\frac{1}{t-t\cdot e^{i\delta(\varepsilon)}}+\frac{2i}{\varepsilon t}\right)=$$

$$=\frac{1}{t}\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{e^{i\delta(\varepsilon)}}{e^{i\delta(\varepsilon)}-1}-\frac{1}{1-e^{i\delta(\varepsilon)}}+\frac{2i}{\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{e^{i\delta(\varepsilon)}+1}{e^{i\delta(\varepsilon)}-1}+\frac{2i}{\varepsilon}\right)=0, \tag{1.5}$$

где $\delta(\varepsilon)=2\arcsin\frac{\varepsilon}{2}\sim\varepsilon$ при $\varepsilon\to 0+$. Из равенства (1.5) получим, что

$$\int_{\gamma_0}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}=\int_{\gamma_0}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau\,, \tag{1.6}$$

где в правой части интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Из равенств (1.2) и (1.4) следует, что если $\varphi(\tau)\in H_1(\alpha)$ на $\gamma_0$, т.е. если $\varphi'(\tau)$ принадлежит классу Гельдера $H(\alpha)$ степени $0<\alpha\le 1$ на $\gamma_0$, то гиперсингулярный интеграл (1.3) существует и справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_{\gamma_0}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}=\int_{\gamma_0}\frac{\varphi'(\tau)d\tau}{\tau-t}\,, \tag{1.7}$$

где в правой части интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

**Теорема 1.1.** Для любой абсолютно непрерывной на $\gamma_0$ функции $\varphi$ гиперсингулярный интеграл (1.3) существует почти для всех точек $t\in\gamma_0$ и справедлива формула интегрирования по частям (1.7) .

**Доказательство**. Из абсолютно непрерывности на $\gamma_0$ функции $\varphi$

следует, что почти для всех точек $\tau \in \gamma_0$ существует производная $\varphi'(\tau)$ и функция $\varphi'(\tau)$ интегрируема по Лебегу. Тогда интеграл, стоящий в правой части равенства (1.7), существует почти для всех точек $t \in \gamma_0$ (см. например, [14, гл.4, §3]) .

В каждой точке $t$, где функция $\varphi$ дифференцируема, справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0+}\left( \frac{\varphi\left(t \cdot e^{-i\delta(\varepsilon)}\right)}{t - t \cdot e^{-i\delta(\varepsilon)}} - \frac{\varphi\left(t \cdot e^{i\delta(\varepsilon)}\right)}{t - t \cdot e^{i\delta(\varepsilon)}} + \frac{2i\varphi(t)}{\varepsilon t} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+}\left[ \frac{\varphi(t) + \varphi'(t)\cdot\left(t \cdot e^{-i\delta(\varepsilon)} - t\right) + o(\varepsilon)}{t - t \cdot e^{-i\delta(\varepsilon)}} - \frac{\varphi(t) + \varphi'(t)\cdot\left(t \cdot e^{i\delta(\varepsilon)} - t\right) + o(\varepsilon)}{t - t \cdot e^{i\delta(\varepsilon)}} + \frac{2i\varphi(t)}{\varepsilon t} \right] =$$

$$= \frac{\varphi(t)}{t} \lim_{\varepsilon \to 0+}\left( \frac{e^{i\delta(\varepsilon)} + 1}{e^{i\delta(\varepsilon)} - 1} + \frac{2i}{\varepsilon} \right) = 0,$$

где $\delta(\varepsilon) = 2\arcsin\dfrac{\varepsilon}{2}$, то из равенства

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} = \frac{\varphi\left(t \cdot e^{-i\delta(\varepsilon)}\right)}{t - t \cdot e^{-i\delta(\varepsilon)}} - \frac{\varphi\left(t \cdot e^{i\delta(\varepsilon)}\right)}{t - t \cdot e^{i\delta(\varepsilon)}} + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\varphi'(\tau)d\tau}{\tau - t}$$

следует, что гиперсингулярный интеграл (1.3) существует почти для всех точек $t \in \gamma_0$ и справедлива формула (1.7). Теорема доказана.

## §2. Об аппроксимации гиперсингулярного интегрального оператора на окружности

Обозначим через $L_2(\gamma_0)$ пространство квадратично-суммируемых на $\gamma_0$ функций с нормой

$$\|\varphi\|_{L_2} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_0} |\varphi(\tau)|^2 |d\tau| \right)^{\frac{1}{2}},$$

а через $W_2^1(\gamma_0)$ – пространство абсолютно непрерывных на $\gamma_0$ функций, производная которых принадлежит на $L_2(\gamma_0)$, с нормой

$$\|\varphi\|_{W_2^1} = \|\varphi\|_{L_2} + \|\varphi'\|_{L_2}.$$

Из теоремы 1.1 следует, что гиперсингулярный интегральный оператор

$$(H\varphi)(t) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau, \qquad t \in \gamma_0$$

ограниченно действует от пространства $W_2^1(\gamma_0)$ к пространству $L_2(\gamma_0)$, при этом

$$\|H\|_{W_2^1(\gamma_0)\to L_2(\gamma_0)} \le 1. \tag{2.1}$$

Рассмотрим последовательность операторов

$$(H_n\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi\left(\tau_{2k+1}^{(t)}\right)-\varphi(t)}{\left(\tau_{2k+1}^{(t)}-t\right)^2}\Delta\tau_{2k+1}^{(t)}, \quad t\in\gamma_0, \quad n=1,2,..,$$

где $\tau_k^{(t)} = e^{k\theta i}\cdot t$, $\Delta\tau_k^{(t)} = \left(\Delta\tau_{k+1}^{(t)} - \Delta\tau_{k-1}^{(t)}\right)\dfrac{\theta}{\sin\theta} = 2ie^{k\theta i}\cdot t\cdot\theta$, $k=\overline{0,2n}$, $\theta = \dfrac{\pi}{n}$.

Вычислим $H_n(t^m)$ для любого $m\in Z$ ($Z$- множество целых вещественных чисел):

$$\left(H_n t^m\right) = \frac{1}{\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\tau_{2k+1}^{(t)}\right)^m - t^m}{\left(\tau_{2k+1}^{(t)}-t\right)^2}\Delta\tau_{2k+1}^{(t)} = \frac{1}{\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{m(2k+1)\theta i}\cdot t^m - t^m}{\left(e^{(2k+1)\theta i}\cdot t - t\right)^2}2ie^{(2k+1)\theta i}\cdot t\cdot\theta =$$

$$= \frac{2t^{m-1}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{m(2k+1)\theta i}-1}{\left(e^{(2k+1)\theta i}-1\right)^2}\cdot e^{(2k+1)\theta i} = \mu_m^{(n)}\cdot t^{m-1}, \tag{2.2}$$

где $\mu_m^{(n)} = \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{m(2k+1)\theta i}-1}{\left(e^{(2k+1)\theta i}-1\right)^2}\cdot e^{(2k+1)\theta i}$. Так как $\mu_0^{(n)} = 0$,

$$\mu_{m+1}^{(n)} - \mu_m^{(n)} = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{(m+1)(2k+1)\theta i} - e^{m(2k+1)\theta i}}{\left(e^{(2k+1)\theta i}-1\right)^2}\cdot e^{(2k+1)\theta i} =$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{(m+1)(2k+1)\theta i}}{e^{(2k+1)\theta i}-1} = \frac{1}{in}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{\left(m+\frac{1}{2}\right)(2k+1)\theta i}}{\sin(2k+1)\frac{\theta}{2}} = \lambda_m^{(n)},$$

и $\lambda_m^{(n)} = 1$ при $m=\overline{0,n-1}$, $\lambda_m^{(n)} = -1$ при $m=\overline{n,2n-1}$, $\lambda_{m\pm 2n}^{(n)} = \lambda_m^{(n)}$ при всех $m\in Z$ (см. [5]), то вычисляя $\mu_n^{(n)}$ получим, что $\mu_m^{(n)} = m$ при $m=\overline{0,n}$, $\mu_m^{(n)} = 2n-m$ при $m=\overline{n+1,2n}$, $\mu_{m\pm 2n}^{(n)} = \mu_m^{(n)}$ при всех $m\in Z$.

Пусть $\varphi(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k t^k \in W_2^1(\gamma_0)$. Тогда учитывая (2.2), имеем

$$(H_n\varphi)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\mu_k^{(n)}t^{k-1}.$$

Так как коэффициент $\mu_k^{(n)}$ удовлетворяет неравенству $\left|\mu_k^{(n)}\right| \le |k|$ для всех $k\in Z$, то

$$\|H_n\varphi\|_{L_2(\gamma_0)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|^2\left|\mu_k^{(n)}\right|^2 \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty}k^2|c_k|^2 = \|\varphi'\|_{L_2(\gamma_0)} \le \|\varphi\|_{W_2^1(\gamma_0)}.$$

Отсюда следуют следующие свойства операторов $H_n$:

**Свойства 2.1.** Операторы $H_n$, $n=1,2,..$ ограниченно действует от пространства $W_2^1(\gamma_0)$ к пространству $L_2(\gamma_0)$, при этом

$$\|H_n\|_{W_2^1(\gamma_0)\to L_2(\gamma_0)} \le 1, \tag{2.3}$$

и для любого алгебраического полинома $q(t)=\sum_{k=-n+1}^{n-1} q_k t^k$ степени не выше $n-1$

$$(H_n q)(t)=(Hq)(t). \tag{2.4}$$

Пусть $E_n(\varphi;W_2^1)=\inf_{q\in T_n}\|\varphi(\cdot)-q_n(\cdot)\|_{W_2^1(\gamma_0)}$ – есть наилучшее приближение функции $\varphi\in W_2^1(\gamma_0)$ полиномами из $T_{n-1}$, где $T_{n-1}$ – множество полиномов вида $\sum_{k=-n+1}^{n-1}\alpha_k t^k$, $\alpha_k\in C$.

**Теорема 2.1.** Последовательность операторов $\{H_n\}$ сильно сходится к оператору $H$ в пространстве $W_2^1(\gamma_0)$; при этом для любого $\varphi\in W_2^1(\gamma_0)$ справедлива оценка

$$\|H\varphi-H_n\varphi\|_{L_2(\gamma_0)}\le 2E_n(\varphi;W_2^1).$$

**Доказательство.** Пусть $q_{n-1}(t)=\sum_{k=-n+1}^{n-1} q_k^{(n)} t^k$ -есть полином наилучшего приближения функции $\varphi\in W_2^1(\gamma_0)$ из $T_{n-1}$. Тогда с учетом равенства (2.4) имеем

$$(H\varphi-H_n\varphi)(t)=H(\varphi-q_{n-1})(t)-H_n(\varphi-q_{n-1})(t).$$

Отсюда и из неравенств (2.1), (2.3) следует

$$\|H\varphi-H_n\varphi\|_{L_2(\gamma_0)}\le\left(\|H\|_{W_2^1(\gamma_0)\to L_2(\gamma_0)}+\|H_n\|_{W_2^1(\gamma_0)\to L_2(\gamma_0)}\right)\cdot\|\varphi-q_{n-1}\|_{W_2^1(\gamma_0)}=2E_n(\varphi;W_2^1).$$

Теорема доказана.

### ЛИТЕРАТУРА


1. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978.
2. Лифанов И.К., Михайлов А.А. К расчету безотрывного и отрывного обтекания тел. Труды ВВИА им. Н.Е. Жуковского, №1313, 1986, 137-145.
3. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К., Михайлов А.А. Расчет бесциркуляционного обтекания произвольных тел. Ученые записки ЦАГИ, 18:5 (1987), 1-10.
4. Belotserkovsky S.M., Lifanov I.K. Method of Discrete Vortices, Boca Raton, CRC Press, 1993.
5. Алиев Р.А. Новый конструктивный метод решения сингулярных интегральных уравнений. Матем. заметки, 79:6 (2006), 803-824.
6. Алиев Р.А., Амрахова А.Ф. Конструктивный метод решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта. Труды института Матем. и Механики УрО РАН, 18:4 (2012), 14-25.
7. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гипер-

болического типа. М.: Наука, 1978.
8. Анфиногенов А.Ю., Лифанов И.К., Лифанов П.И. О некоторых гиперсингулярных одномерных и двумерных интегральных уравнениях. Матем. сб., 192:8 (2001), 3-46.
9. Youn-Sha Chan, Albert C. Fannjiang, Glaucio H. Paulino, Bao-Feng Feng. Finite Part Integrals and Hypersingular Kernels. Advances in Dynamical Systems, 14 (2007), 264-269.
10. Martin P.A. Exact solution of a Simple Hypersingular Integral Equation. Journal of Integral Equations and Applications, 4:2 (1992), 197-204.
11. Suzan J. Obaiys, Z. K. Eskhuvatov, N. M. A. Nik long, M. A. Jamaludin. Galerkin Method for the Numerical Solution of Hypersingular Integral Equations Based Chebyshev Polynomials. Int. Journal of Math. Analysis, 54:6 (2012), 2653-2664.
12. Farina L., Martin P.A., Peron V. Hypersingular integral equations over a disc: Convergence of a spectral method and connection with Tranter's method. Journal of Computational and Applied Mathematics, 269 (2014), 118–131.
13. Chalang Hu, Jing Lu, Xiaoming He. Numerical solutions of a Hypersingular integral equation with application to productivity formulae of horizontal wells producing at constant wellbore pressure. International Journal of Numerical Analysis and Modeling, Series B, 5:3 (2014), 269–288.
14. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, Т. 1, М.: Мир, 1965.

## DAİRƏDƏ HİPERSİNQULYAR İNTEQRAL OPERATORUN APPROKSİMASİYASI HAQQINDA

**A.F.ƏMRAHOVA, Ç.A.HACIYEVA**

### XÜLASƏ

İşdə dairədə hipersinqulyar inteqral operator xüsusi şəkildə olan operatorlar ardıcıllığı ilə approksimasiya olunur. İsbat olunur ki, hipersinqulyar inteqral operator üçün approksimasiya operatorları bu operatorun əsas xassələrini saxlayırlar və buna görə də alınan qiymətləndirmələr yığılma sürəti nöqteyi-nəzərincə daha dəqiq nəticələr verir.

**Açar sözlər:** hipersinqulyar inteqral, approksimasiya operatorları, yığılma sürəti, Koşi nüvəsi.

## ON APPROXIMATION OF THE HYPERSINGULAR INTEGRAL OPERATOR ON THE CİRCLE

**A.F.AMRAHOVA, Ch.A.HAJIYEVA**

### SUMMARY

This article deals with a hypersingular integral operator approximated by sequences of operators of a special form; it is proved that, for a hypersingular operator, approximating operators retain properties similar to the basic properties of this operator, and therefore, the estimates obtained in terms of speed of convergence give results that are more accurate.

**Key words:** hypersingular integral, approximating operators, speed of convergence, Cauchy kernel.

*Поступила в редакцию: 22.05.2015 г.*
*Подписано к печати: 12.02.2016 г.*